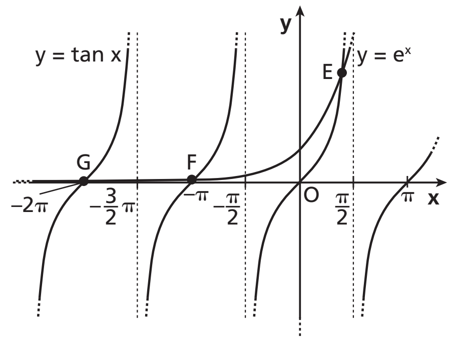
## Liceo scientifico e opzione scienze applicate

**8** Provare che la funzione $y = e^x - \tan x$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - \arctan x$ non ne ha alcuno.

**8** Verifichiamo che $f(x) = e^x - \tan x$ ha infiniti zeri.

Il quesito si può riformulare come segue: mostrare che i grafici delle funzioni $y = e^x$ e $y = \tan x$ si intersecano in infiniti punti.
Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano il grafico delle due funzioni, in un intervallo attorno all'origine, in cui sono segnati tre punti di intersezione *E*, *F* e *G* a titolo di esempio.
Dal confronto dei due grafici, risulta che quello della funzione esponenziale interseca quello della tangente una sola volta in ognuno degli infiniti intervalli $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, con $k \in \mathbb{Z}$.




■ **Figura 9**

Osserviamo infatti che:

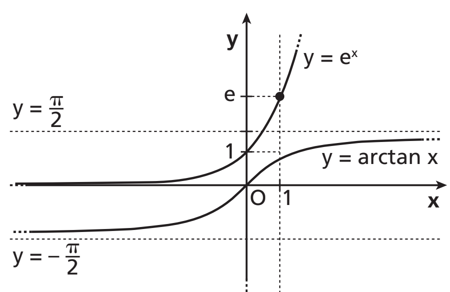
- $f(x)$ è continua nell'intervallo $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$;
- i limiti di $f(x)$ agli estremi di ciascun intervallo sono infiniti, di segno opposto,

$$\lim_{x \to \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = -\infty,$$

  e quindi esistono due valori $x_1 < x_2$, interni all'intervallo, nei quali la funzione assume segno opposto: $f(x_1) > 0$ mentre $f(x_2) < 0$;
- per il teorema degli zeri, esiste un $\bar{x} \in \left]x_1; x_2\right[$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Concludendo: poiché $f(x)$ si annulla almeno una volta all'interno di un numero infinito di intervalli, essa ha infiniti zeri.

Verifichiamo ora che $g(x) = e^x - \arctan x$ non ha alcuno zero.
Il problema equivale a dimostrare che non ci sono punti in comune tra i grafici delle funzioni $y = e^x$ e $y = \arctan x$.
La loro rappresentazione suggerisce che le due funzioni non hanno punti in comune.
Dimostriamo che $e^x > \arctan x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, confrontando le due funzioni su tre intervalli consecutivi.




■ **Figura 10**

Ricordiamo che:

- $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$;
- entrambe le funzioni sono crescenti.

Da ciò, possiamo dedurre quanto segue.

- Per $x \leq 0$: $\arctan x \leq 0$, mentre $e_x > 0$.
- Per $0 < x \leq 1$: $\arctan x \leq \arctan 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, mentre $e^x > 1$.
- Per $x > 1$: $\arctan x < \frac{\pi}{2} < 2$, mentre $e^x > e > 2$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta dunque $e^x > \arctan x$; ne segue che la funzione $e^x - \arctan x$ è sempre positiva, e quindi non si annulla per alcun valore di *x*.