

9 Dimostrare che l'equazione:

$$\arctan x + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

9 Studiamo la funzione  $f(x) = \arctan x + x^3 + e^x$ . Gli zeri di questa funzione corrispondono alle soluzioni dell'equazione data.

Osserviamo che  $f(x)$  è continua e strettamente crescente su tutto  $\mathbb{R}$  poiché somma di tre funzioni continue e strettamente crescenti su tutto  $\mathbb{R}$ . Inoltre, è illimitata sia inferiormente sia superiormente, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \infty + 0 = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \infty + \infty = +\infty.$$

Quindi,  $f(x)$  è iniettiva e suriettiva su  $\mathbb{R}$ . La biiettività assicura che  $f(x)$  assume tutti i valori tra  $-\infty$  e  $+\infty$  una e una sola volta. In particolare, esiste esattamente un valore  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  tale che  $f(\bar{x}) = 0$ .